인수분해와 이차방정식

분수에서 쏘아 올린 물줄기의 높이, 움직이는 물체가 가지는 에너지 등
실세계에서는 다항식 또는 이차방정식으로 나타낼 수 있는 현상이 많이 있다.
이차방정식은 수량 사이의 관계를 명확하고 간결하게 표현해 주는 수학적 도구로서
우리 생활 주변의 여러 가지 문제를 해결하는 데 도움이 된다.

배운 내용

- 소인수분해, 문자의 사용과 식의 계산, 일차방정식(중1)
- 다항식의 계산, 연립일차방정식(중2)

이 단원에서는

Ⅱ-1 다항식의 곱셈
인수분해

Ⅱ-2 이차방정식과 그 해
이차방정식의 풀이와 활용

배울 내용

- 다항식의 연산, 나머지정리, 인수분해, 복소수와 이차방정식, 이차방정식과 이차함수, 여러 가지 방정식
(고등학교 수학)

| 준비 학습 |

1 다음 수를 소인수분해하시오. 중1

(1) 56 (2) 143

2 다음을 계산하시오. 중2

(1) $x(x-2y)$ (2) $2x(x+y)+3y(2x-5y)$

3 다음 일차방정식을 푸시오. 중1

(1) $2x+15=5x$ (2) $x-3=2(x-1)$

대단원 포트폴리오

이 단원을 학습하면서 다음 중에서 하나를 선택하여 작성해 보자.

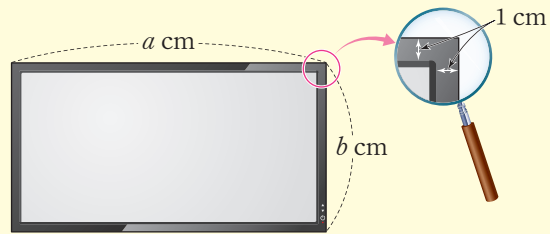
- ☐ 수학 달력
- ☐ 수학 게임
- ☐ 수학 포스터
- ☐ 수학 만화
- ☐ 수학사 보고서
- ☐ 수학 비주얼 싱킹

● 포트폴리오 예시와 길잡이 ▶ 226쪽

1 다항식의 곱셈과 인수분해

수학 + 디자인

TV, 모니터 등의 디스플레이 기기에서 화면 이외의 테두리 부분을 '베젤(bezel)'이라고 한다. 최근 TV나 스마트폰 등의 제품에서는 베젤의 너비를 점점 줄이는 경향이 있는데, 이는 불필요한 부분을 줄임으로써 화면에 대한 집중도와 활용도를 높이기 위한 것이라고 한다.

단원 활동 디스플레이 기기의 화면의 넓이를 이용하여 다항식의 곱셈에 대하여 알아보자.

활동 1 베젤을 뺀 화면의 넓이를 다음 두 가지 방법으로 구해 보자.

방법 1 화면의 가로와 세로의 길이의 곱으로 구하기

➜

방법 2 전체 디스플레이 기기의 넓이에서 베젤의 넓이를 빼어서 구하기

➜

활동 2 활동 1에서 방법 1과 방법 2로 각각 구한 두 식을 등식으로 나타내 보자.

위의 활동으로 **알게 된 것**과 **나의 학습 계획**을 적어 보자.

알게 된 것
- ▶ 화면의 넓이를 두 가지 방법으로 나타낼 수 있다. 예 ☐ 아니요 ☐
- ▶ 두 다항식의 곱셈을 이해할 수 있다. 예 ☐ 아니요 ☐

학습할 내용 ▶ 다항식의 곱셈 ▶ 인수분해

학습 계획

학습 계획안 예시
- 예습과 복습을 열심히 하겠다.
- 수업 시간에 집중하겠다.
- 수학에 대한 자신감을 키우겠다.
- 모둠 활동에 적극적으로 참여하겠다.

다항식의 곱셈

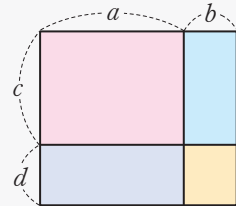
• 다항식의 곱셈을 할 수 있다.

(다항식)×(다항식)은 어떻게 전개할까?

개 념 열 기

오른쪽 그림은 직사각형 1개를 작은 직사각형 4개로 나눈 것이다.

1 전체 직사각형의 넓이를 (가로의 길이)×(세로의 길이)로 나타내시오.

2 전체 직사각형의 넓이를 작은 직사각형 4개의 넓이의 합으로 나타내고, **1**의 결과와 비교하시오.

위의 개념 열기에서 전체 직사각형의 넓이는 $(a+b)(c+d)$이고, 작은 직사각형 4개의 넓이의 합은 $ac+ad+bc+bd$이므로

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

이다.

중1 에서 배웠어요!

분배법칙

• $m(a+b)=ma+mb$

• $(a+b)m=am+bm$

위의 등식은 $(a+b)(c+d)$에서 $c+d$를 한 문자 M으로 놓고 분배법칙을 이용하여 다음과 같이 전개한 것과 같다.

$$\begin{aligned}(a+b)(c+d)&=(a+b)M && \leftarrow c+d\text{를 } M\text{으로 놓음}\\ &=aM+bM && \leftarrow \text{분배법칙 이용}\\ &=a(c+d)+b(c+d) && \leftarrow M\text{에 } c+d\text{를 대입}\\ &=ac+ad+bc+bd && \leftarrow \text{분배법칙 이용}\end{aligned}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

다항식의 곱셈

$$(a+b)(c+d)=\underset{①}{ac}+\underset{②}{ad}+\underset{③}{bc}+\underset{④}{bd}$$

스스로 확인하기

(1) $(a+3)(b+2)=\underset{①}{ab}+\underset{②}{2a}+\underset{③}{3b}+\underset{④}{6}$

(2) $(2x+5)(y+3)=2xy+6x+\square+15$

문제 01 다음 식을 전개하시오.

(1) $(a-2)(b+4)$

(2) $(x-1)(2y-3)$

다항식과 다항식의 곱셈을 전개할 때, 전개한 식에 동류항이 있으면 동류항끼리 모아서 간단히 정리한다.

다음 식을 전개하시오.

(1) $(a+3b)(2a+b)$

(2) $(3x-2y)(5x+4y)$

풀이 (1) $(a+3b)(2a+b)=a\times 2a+a\times b+3b\times 2a+3b\times b$

$=2a^2+ab+6ab+3b^2$

$=2a^2+7ab+3b^2$

(2) $(3x-2y)(5x+4y)=3x\times 5x+3x\times 4y+(-2y)\times 5x+(-2y)\times 4y$

$=15x^2+12xy-10xy-8y^2$

$=15x^2+2xy-8y^2$

답 (1) $2a^2+7ab+3b^2$ (2) $15x^2+2xy-8y^2$

문제 02 다음 식을 전개하시오.

(1) $(3a+b)(a-2b)$

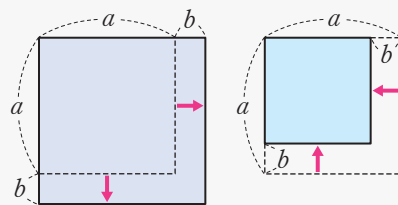
(2) $(x-2y)(4x-3y)$

◆ $(a+b)^2$, $(a-b)^2$은 어떻게 전개할까?

개 념 열 기

한 변의 길이가 a인 정사각형이 있다.

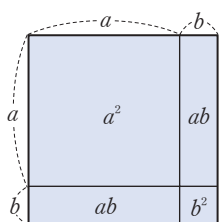
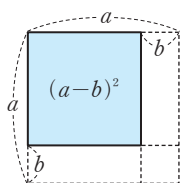
1 가로와 세로의 길이를 모두 b만큼 늘인 정사각형의 넓이를 식으로 나타내고, 분배법칙을 이용하여 전개하시오.

2 가로와 세로의 길이를 모두 b만큼 줄인 정사각형의 넓이를 식으로 나타내고, 분배법칙을 이용하여 전개하시오.

위의 개념 열기에서 정사각형의 넓이는 각각 $(a+b)^2$, $(a-b)^2$으로 나타낼 수 있다.

따라서 분배법칙을 이용하여 $(a+b)^2$, $(a-b)^2$을 각각 전개하면

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)$$
$$=a^2+ab+ba+b^2$$
$$=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)$$
$$=a^2-ab-ba+b^2$$
$$=a^2-2ab+b^2$$

이다.

a, b, a^2, ab, ab, b^2

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

이상을 정리하면 다음과 같다.

곱셈 공식 (1)

❶ $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

❷ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

스스로 확인하기

빈칸에 알맞은 것을 써넣어 보자.

(1) $(a+1)^2=a^2+2\times a\times 1+1^2=a^2+2a+1$

(2) $(x-3)^2=x^2-2\times\square\times 3+3^2=x^2-\square+\square$

문제 03

다음 식을 전개하시오.

(1) $(a+5)^2$

(2) $(2x-1)^2$

예제 2

다음 식을 전개하시오.

(1) $(2a+b)^2$

(2) $(3x-5y)^2$

풀이

(1) $(2a+b)^2=(2a)^2+2\times 2a\times b+b^2$

$=4a^2+4ab+b^2$

(2) $(3x-5y)^2=(3x)^2-2\times 3x\times 5y+(5y)^2$

$=9x^2-30xy+25y^2$

답 (1) $4a^2+4ab+b^2$ (2) $9x^2-30xy+25y^2$

문제 04

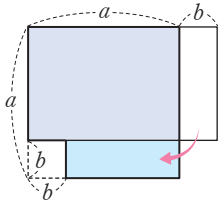
다음 식을 전개하시오.

(1) $(a+3b)^2$

(2) $(2x-3y)^2$

(3) $(-4a+b)^2$

(4) $(-5x-2y)^2$

$(a+b)(a-b)$는 어떻게 전개할까?

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

분배법칙을 이용하여 $(a+b)(a-b)$를 전개하면

$$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ba-b^2$$
$$=a^2-b^2$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

곱셈 공식 (2)

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

스스로 확인하기

(1) $(a+1)(a-1)=a^2-1^2=a^2-1$

(2) $(x+2)(x-2)=x^2-\square^2=x^2-\square$

문제 05 다음 식을 전개하시오.

(1) $(2x+1)(2x-1)$

(2) $(5-a)(5+a)$

다음 식을 전개하시오.

(1) $(a+2b)(a-2b)$

(2) $(3x-4y)(3x+4y)$

(1) $(a+2b)(a-2b)=a^2-(2b)^2=a^2-4b^2$

(2) $(3x-4y)(3x+4y)=(3x)^2-(4y)^2=9x^2-16y^2$

답 (1) a^2-4b^2 (2) $9x^2-16y^2$

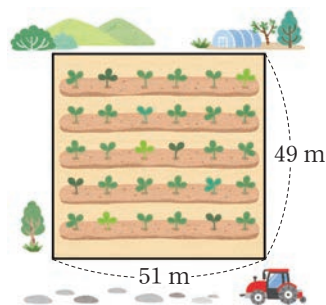
문제 06 다음 식을 전개하시오.

(1) $(a+3b)(a-3b)$

(2) $(5x+2y)(5x-2y)$

(3) $(-2a+3b)(-2a-3b)$

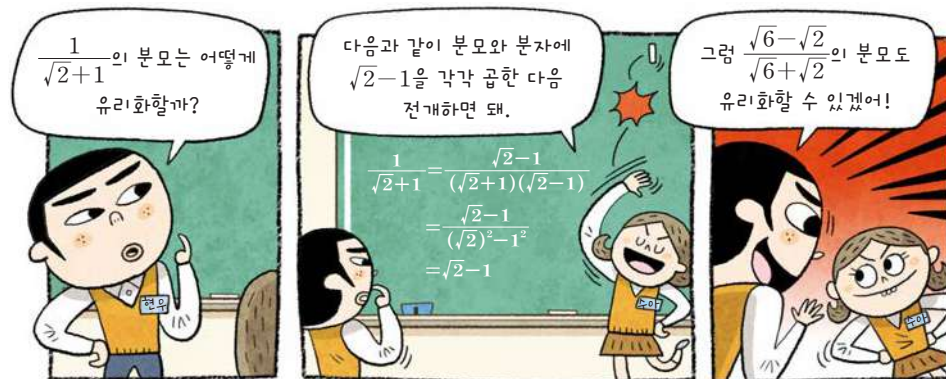
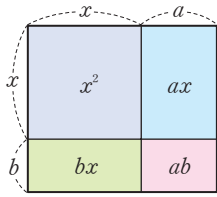
(4) $\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}y\right)\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}y\right)$

문제 07 오른쪽 그림과 같은 직사각형 모양의 밭의 넓이를 구하기 위해 밭의 가로와 세로의 길이를 재었더니 각각 51 m, 49 m이었다. $51=50+1$, $49=50-1$임을 이용하여 이 밭의 넓이를 구하시오.

문제 해결

수학 역량 기르기

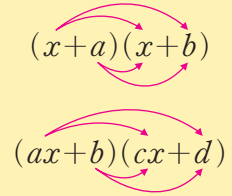
문제를 해결할 때는

- 해결해야 할 문제가 무엇인지 파악한다.
- 풀이 계획을 수립하고 실행한다.

다음 두 학생의 대화를 읽고, 곱셈 공식을 이용하여 $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$의 분모를 유리화하시오.

◆ $(x+a)(x+b)$, $(ax+b)(cx+d)$는 어떻게 전개할까?

$(x+a)(x+b)$
$=x^2+(a+b)x+ab$

분배법칙을 이용하여 $(x+a)(x+b)$, $(ax+b)(cx+d)$를 각각 전개하면

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b)&=x^2+bx+ax+ab\\&=x^2+(a+b)x+ab\\(ax+b)(cx+d)&=acx^2+adx+bcx+bd\\&=acx^2+(ad+bc)x+bd\end{aligned}$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

곱셈 공식 (3)

❶ $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

❷ $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

예제 4

다음 식을 전개하시오.

(1) $(x+2)(x+3)$　　(2) $(2x+3y)(3x-5y)$

(1) $(x+2)(x+3)=x^2+(2+3)x+2\times3$
$=x^2+5x+6$

(2) $(2x+3y)(3x-5y)=(2\times3)x^2+\{2\times(-5)+3\times3\}xy+\{3\times(-5)\}y^2$
$=6x^2-xy-15y^2$

답 (1) x^2+5x+6　(2) $6x^2-xy-15y^2$

다음 식을 전개하시오.

(1) $(x-1)(x+3)$　　(2) $(3x-y)(4x+3y)$

인수분해

• 인수분해를 할 수 있다.

인수분해는 무엇일까?

개 념 열 기

자연수를 소인수분해할 수 있는 것과 같이 다항식도 분해할 수 있다. 다음 대화를 읽고, 물음에 답하시오.

하은: 자연수 15를 소인수분해하면 $15=3\times5$야.

서준: 다항식 x^2+3x+2를 두 일차식의 곱으로 분해하려면 어떻게 해야 할까?

윤아: 곱셈 공식을 이용하면 될 것 같아.

1 $(x+1)(x+2)$를 전개하여 등식으로 나타내시오.

2 **1**의 등식의 좌변과 우변을 서로 바꾸어 나타내시오.

위의 개념 열기에서 다항식 $(x+1)(x+2)$를 전개하여 등식으로 나타내면

$$(x+1)(x+2)=x^2+3x+2$$

이고, 이 등식의 좌변과 우변을 서로 바꾸면

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$$

가 된다.

즉, 다항식 x^2+3x+2는 두 일차식 $x+1$과 $x+2$의 곱으로 나타낼 수 있다.

이와 같이 하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타낼 때, 각각의 식을 처음 식의 **인수**라 하고, 하나의 다항식을 두 개 이상의 인수의 곱으로 나타내는 것을 그 다항식을 **인수분해**한다고 한다.

$$x^2+3x+2 \underset{\text{전개}}{\overset{\text{인수분해}}{\rightleftarrows}} (x+1)(x+2)$$

($x+1$, $x+2$: 인수)

해리엇
(Harriot, T., 1560~1621)
영국의 수학자. 인수분해를 방정식 연구에 이용하였다.

스스로 확인하기

$x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$이므로 $x+1$, $x+3$은 다항식 x^2+4x+3의 인수이고, x^2+4x+3을 인수분해하면 $(x+1)(x+3)$이다.

다음 식은 어떤 다항식을 인수분해한 것인지 말하시오.

(1) $(a-1)(a+1)$ (2) $(x-3)(x+1)$

다항식의 각 항에 공통인 인수가 있을 때는 분배법칙을 이용하여 공통인 인수를 묶어 내어 인수분해할 수 있다.

예를 들어 다항식 $ma+mb$는 두 항 ma, mb의 공통인 인수 m을 묶어 내면

$$ma+mb=m(a+b)$$

와 같이 인수분해된다.

다음 식을 인수분해하시오.

(1) x^2+5x (2) $2a^2b-4ab$

풀이 (1) x^2과 $5x$의 공통인 인수는 x이므로

$$x^2+5x=x(x+5)$$

(2) $2a^2b$와 $-4ab$의 공통인 인수는 $2ab$이므로

$$2a^2b-4ab=2ab(a-2)$$

 인수분해할 때는 각 항의 공통인 인수가 남지 않도록 모두 묶어 낸다.

답 (1) $x(x+5)$ (2) $2ab(a-2)$

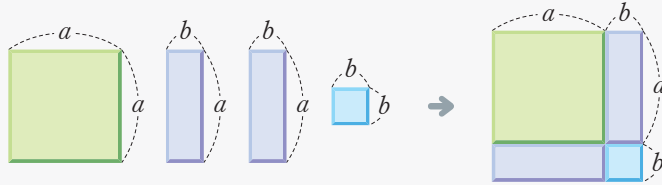
다음 식을 인수분해하시오.

(1) $2a^2-3a$ (2) $ax+2x^2$

(3) $2ax^2-5ax$ (4) $6x^2y-3xy^2$

$a^2+2ab+b^2$, $a^2-2ab+b^2$은 어떻게 인수분해할까?

개 념 열 기

다음 그림은 대수 막대 4개를 이용하여 정사각형을 만든 것이다. 대수 막대 4개의 넓이의 합과 전체 정사각형의 넓이의 관계를 등식으로 나타내시오.

곱셈 공식

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2, \quad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

에서 좌변과 우변을 서로 바꾸면 다음과 같은 인수분해 공식을 얻는다.

인수분해 공식 (1)

❶ $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ ❷ $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

예제 2

다음 식을 인수분해하시오.

(1) a^2+4a+4 (2) $4x^2-12xy+9y^2$

 풀이

(1) $a^2+4a+4=a^2+2\times a\times 2+2^2=(a+2)^2$

(2) $4x^2-12xy+9y^2=(2x)^2-2\times 2x\times 3y+(3y)^2=(2x-3y)^2$

답 (1) $(a+2)^2$ (2) $(2x-3y)^2$

문제 03

다음 식을 인수분해하시오.

(1) $a^2+8a+16$

(2) x^2-6x+9

(3) $4a^2+12ab+9b^2$

(4) $9x^2-24xy+16y^2$

$(a+1)^2$, $2(a-b)^2$, $-3(2x-3y)^2$ 등과 같이 다항식의 제곱으로 이루어진 식 또는 그 식에 수를 곱한 식을 **완전제곱식**이라고 한다.

예제 3

다음 식이 완전제곱식이 되도록 빈칸에 알맞은 것을 쓰시오.

(1) $a^2+6a+\square$ (2) $x^2+\square+25y^2$

풀이 (1) $a^2+6a+\square=a^2+2\times a\times 3+\square$

$=(a+3)^2$

따라서 $\square=3^2=9$이다.

(2) $x^2+\square+25y^2=x^2+\square+(\pm 5y)^2$

$=(x\pm 5y)^2$

따라서 $\square=2\times x\times(\pm 5y)=\pm 10xy$이다.

답 (1) 9 (2) $\pm 10xy$

문제 04

다음 식이 완전제곱식이 되도록 빈칸에 알맞은 것을 쓰시오.

(1) $a^2+12a+\square$

(2) $a^2-4ab+\square$

(3) $9x^2+\square+1$

(4) $4x^2+\square+81y^2$

열린 문제 05

다항식 $a^2+\square\times a+\square$가 완전제곱식이 되도록 빈칸에 알맞은 수를 각각 쓰시오.

a^2-b^2은 어떻게 인수분해할까?

개 념 열 기

다음 물음에 답하시오.

1 $(a+2)(a-2)$를 전개하여 등식으로 나타내시오.

2 **1**의 등식의 좌변과 우변을 서로 바꾸어 나타내시오.

곱셈 공식

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

에서 좌변과 우변을 서로 바꾸면 다음과 같은 인수분해 공식을 얻는다.

인수분해 공식 (2)

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

예제 4

다음 식을 인수분해하시오.

(1) a^2-16

(2) $9x^2-25y^2$

풀이 (1) $a^2-16=a^2-4^2=(a+4)(a-4)$

(2) $9x^2-25y^2=(3x)^2-(5y)^2=(3x+5y)(3x-5y)$

답 (1) $(a+4)(a-4)$ (2) $(3x+5y)(3x-5y)$

문제 06

다음 식을 인수분해하시오.

(1) a^2-36

(2) $4x^2-49$

(3) a^2-4b^2

(4) $25x^2-64y^2$

◆ $x^2+(a+b)x+ab$는 어떻게 인수분해할까?

개 념 열 기

다음 표는 곱이 8이고, 합이 6인 두 정수를 찾는 과정이다.

곱이 8인 두 정수	두 정수의 합
$-1,\quad -8$	-9

1 위의 표의 빈칸을 알맞게 채우시오.

2 위의 표에서 두 정수를 a, b라고 할 때, $x^2+(a+b)x+ab=x^2+6x+8$을 만족시키는 a, b를 찾으시오.

곱셈 공식

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

에서 좌변과 우변을 서로 바꾸면 다음과 같은 인수분해 공식을 얻는다.

인수분해 공식 (3)

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

다항식 x^2+5x+6을 인수분해해 보자.

위의 인수분해 공식 (3)의 좌변과 x^2+5x+6을 비교하면

$$a+b=5,\quad ab=6$$

이므로 이것을 만족시키는 두 정수 a, b를 찾으면 주어진 다항식을 인수분해할 수 있다.

오른쪽 표에서 곱이 6인 두 정수 중에서 합이 5인 두 정수는 2와 3이다.

따라서 x^2+5x+6을 인수분해하면

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$$

이다.

곱이 6인 두 정수	두 정수의 합
$-1,\quad -6$	-7
$1,\quad 6$	7
$-2,\quad -3$	-5
$2,\quad 3$	5

예제 5

다항식 $x^2-3x-10$을 인수분해하시오.

풀이 곱이 -10인 두 정수는 오른쪽 표와 같이 4가지 경우가 있다.

이 중에서 합이 -3인 두 정수는 2, -5이므로 주어진 다항식을 인수분해하면

$$x^2-3x-10=(x+2)(x-5)$$

곱이 -10인 두 정수	두 정수의 합
-1, 10	9
1, -10	-9
-2, 5	3
2, -5	-3

답 $(x+2)(x-5)$

문제 07

다음 식을 인수분해하시오.

(1) $x^2+10x+16$

(2) $x^2-9x+18$

(3) a^2+a-20

(4) $a^2-2a-35$

문제 해결

수학 역량 기르기

승우와 연아는 $x=1+\sqrt{3}$일 때, x^2-3x+2의 값을 다음과 같이 서로 다른 방법으로 풀려고 한다. 두 학생의 풀이를 완성하시오.

승우

x^2-3x+2에 $x=1+\sqrt{3}$을 대입하면

연아

x^2-3x+2를 인수분해한 다음 $x=1+\sqrt{3}$을 대입하면

◆ $acx^2+(ad+bc)x+bd$는 어떻게 인수분해할까?

곱셈 공식

$$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$$

에서 좌변과 우변을 서로 바꾸면 다음과 같은 인수분해 공식을 얻는다.

> **인수분해 공식 (4)**
>
> $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

다항식 $3x^2+7x+2$를 인수분해해 보자.

위의 인수분해 공식 (4)의 좌변과 $3x^2+7x+2$를 비교하면

$$ac=3,\quad ad+bc=7,\quad bd=2$$

이므로 이것을 만족시키는 네 정수 a, b, c, d를 찾으면 주어진 다항식을 인수분해할 수 있다.

$ac=3$에서 보통 a, c는 양의 정수로 생각한다.

먼저 $ac=3$인 두 정수 a, c와 $bd=2$인 두 정수 b, d를 구하고 오른쪽과 같이 나타낸 다음, 이 중에서 $ad+bc=7$을 만족시키는 네 정수 a, b, c, d를 찾아보자.

$a \times b \rightarrow bc$
$c \times d \rightarrow ad$
$\overline{\quad ad+bc}$

$1 \times 1 \rightarrow 3$	$1 \times 2 \rightarrow 6$	$1 \times -1 \rightarrow -3$	$1 \times -2 \rightarrow -6$
$3 \times 2 \rightarrow 2$	$3 \times 1 \rightarrow 1$	$3 \times -2 \rightarrow -2$	$3 \times -1 \rightarrow -1$
5	7	-5	-7

위의 네 경우 중에서 주어진 조건을 만족시키는 네 정수는 $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=1$이다.

따라서 $3x^2+7x+2$를 인수분해하면

$$3x^2+7x+2=(x+2)(3x+1)$$

이다.

$3x^2+7x+2$
$1 \times 2 \rightarrow 6 \cdots x+2$
$3 \times 1 \rightarrow 1 \cdots 3x+1$
$\overline{\quad 7}$

예제 6

다항식 $2x^2+3x-14$를 인수분해하시오.

풀이 인수분해 공식 (4)의 좌변과 $2x^2+3x-14$를 비교하면

$$ac=2,\quad ad+bc=3,\quad bd=-14$$

이고, 이것을 만족시키는 네 정수 a, b, c, d를

오른쪽과 같이 찾으면

$$a=1,\quad b=-2,\quad c=2,\quad d=7$$

따라서 주어진 다항식을 인수분해하면

$$2x^2+3x-14=(x-2)(2x+7)$$

답 $(x-2)(2x+7)$

문제 08

다음 식을 인수분해하시오.

(1) $3x^2+8x+4$

(2) $2x^2-5x-3$

(3) $5x^2-7xy-6y^2$

(4) $4x^2+8xy+3y^2$

문제 09

오른쪽은 넓이가 $(10x^2+17x+3)\text{ cm}^2$인 직사각형 모양의 그림이다. 이 그림의 가로의 길이가 $(5x+1)\text{ cm}$일 때, 세로의 길이를 구하시오.

$(5x+1)$ cm

계산력 쑥쑥

1 다음 식을 전개하시오.

(1) $(a+8)^2$

(2) $\left(2x-\frac{1}{2}y\right)^2$

(3) $(3-a)(3+a)$

(4) $(4x+3y)(4x-3y)$

2 다음 식을 전개하시오.

(1) $(x+2)(x+5)$

(2) $\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$

(3) $(3x+1)(2x-3)$

(4) $(-2a+b)(a-b)$

3 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $a^2+12a+36$

(2) $4x^2-20xy+25y^2$

(3) x^2-49

(4) $9a^2-64b^2$

4 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $x^2-7x+10$

(2) a^2+2a-8

(3) $3x^2-11x-20$

(4) $8x^2+18xy+9y^2$

중단원 학습 점검

정답 및 해설 ▶ 248쪽

개념 정리

● 다항식의 곱셈

$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$ ← 분배법칙 이용

● 곱셈 공식

(1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

(2) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

(3) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

● 인수분해

x^2+6x+8 ⇄ (인수분해 / 전개) $(x+2)(x+4)$ — $(x+2)$, $(x+4)$: 인수

● 완전제곱식

$(a+2)^2$, $4(3x-2y)^2$, $-2(x+2y)^2$

└ 다항식의 제곱으로 이루어진 식 또는 그 식에 수를 곱한 식

● 인수분해 공식

(1) $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$, $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

(2) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

(3) $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

(4) $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

O, X 문제

다음 문장이 옳으면 O, 옳지 않으면 X를 ( ) 안에 쓰시오.

1 $(a+2b)(3c-d)$를 전개하면 $3ac-ad+6bc-2bd$이다. ( )

2 $(x+10)(x-10)$을 전개하면 x^2+100이다. ( )

3 $a^2+9a+81$은 완전제곱식이다. ( )

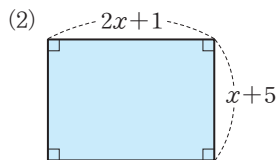
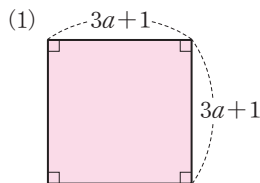
4 $x^2-8x+12$를 인수분해하면 $(x-2)(x-6)$이다. ( )

5 $3a^2+a-2$를 인수분해하면 $(3a+1)(a-2)$이다. ( )

기초 문제

1 다음 도형의 넓이를 곱셈 공식을 이용하여 구하시오.

(1)

(2)

2 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $xy-x^2y$

(2) $5ab^2+20a^2b$

3 다음 보기 중에서 다항식 $(x-2)(2x+1)$의 인수를 모두 찾으시오.

보기

ㄱ. x	ㄴ. $2x$
ㄷ. $-x-3$	ㄹ. $x-2$
ㅁ. $2x+1$	ㅂ. $3x-1$

기본 문제

4 $(3x-a)(bx+5)$를 전개한 식이 $6x^2+cx-10$일 때, 세 수 a, b, c의 값을 각각 구하시오.

5 다음 수의 분모를 유리화하시오.

(1) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

(2) $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$

6 다음을 곱셈 공식 또는 인수분해 공식을 이용하여 계산하시오.

(1) 102^2

(2) 202×198

(3) $51^2-102+1$

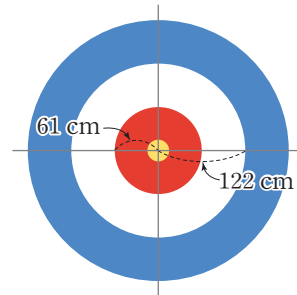
(4) $\sqrt{40^2-24^2}$

7 $16x^2+(7k-2)x+25$가 완전제곱식이 되기 위한 수 k의 값을 모두 구하시오.

8 $x=2+\sqrt{2}$, $y=2-\sqrt{2}$일 때, 인수분해 공식을 이용하여 다음 값을 구하시오.

(1) $x^2+2xy+y^2$

(2) x^2-y^2

9 다음 그림은 컬링 종목에서 사용하는 하우스이다. 흰색 영역의 바깥쪽 원과 안쪽 원의 반지름의 길이가 각각 122 cm, 61 cm일 때, 흰색 영역의 넓이를 구하시오.

도전 문제

10 x^2+8x+k가 $(x+a)(x+b)$로 인수분해될 때, k가 될 수 있는 수 중에서 가장 큰 수를 구하시오. (단, a, b는 정수)

스스로 푸는 자기 주도 학습 수학 익힘책 ▶ 232쪽

수행 과제

자연수의 성질을 탐구해 볼까?

문제 해결 | 추론

활동 목표 자연수의 성질을 다항식의 곱셈과 인수분해를 이용하여 확인할 수 있다.

1 다음은 자연수의 성질에 대한 시우와 민서의 대화이다.

위의 대화에서 민서의 질문에 대하여 연속한 두 짝수와 그 두 짝수 사이에 있는 홀수를 문자로 나타내어 설명해 보자.

2 다음은 민서가 발견한 자연수의 성질이다.

(1) 민서가 발견한 자연수의 성질을 문자를 사용하여 등식으로 나타내 보자.

(2) (1)의 등식이 항상 성립함을 설명해 보자.

2 이차방정식

수학 + 과학

굴러가는 볼링공은 핀을 넘어뜨릴 수 있는 에너지를 가지고 있고, 흐르는 물은 물레방아를 돌릴 수 있는 에너지를 가지고 있다. 이와 같이 운동하는 물체는 에너지를 가지는데, 이때 이 에너지는 물체의 질량과 속력의 제곱에 비례한다고 한다.

(참고 자료: Don Nardo, "Kinetic Energy: The Energy of Motion")

단원 활동 운동하는 물체가 가지는 에너지로부터 이차방정식의 뜻과 풀이를 알아보자.

질량이 m kg인 물체가 초속 v m의 속력으로 운동할 때의 에너지를 E라고 하면 $E=\frac{1}{2}mv^2$(J)이야.

*J(줄): 에너지를 나타내는 단위

활동 1 질량이 4 kg인 볼링공이 초속 v m의 속력으로 굴러갈 때의 에너지가 50 J이라고 하면 $v^2=25$가 성립한다. $v^2=25$에서 우변의 항을 좌변으로 이항했을 때, 좌변은 v에 대한 몇 차식인지 말해 보자.

활동 2 $v^2=25$를 만족시키는 양수 v의 값을 구해 보자.

방정식을 만족시키는 값을 구하는 방법을 알아볼까?

위의 활동으로 **알게 된 것**과 **나의 학습 계획**을 적어 보자.

알게 된 것
- ▶ 우변의 항을 모두 좌변으로 이항한 식에서 좌변이 몇 차식인지 말할 수 있다. 예 ☐ 아니요 ☐
- ▶ 식을 만족시키는 값을 구할 수 있다. 예 ☐ 아니요 ☐

학습할 내용 ▶ 이차방정식과 그 해 ▶ 이차방정식의 풀이와 활용

학습 계획

학습 계획안 예시
- 예습과 복습을 열심히 하겠다.
- 수업 시간에 집중하겠다.
- 수학에 대한 자신감을 키우겠다.
- 모둠 활동에 적극적으로 참여하겠다.

이차방정식과 그 해

• 이차방정식과 그 해의 의미를 이해한다.

이차방정식은 무엇일까?

개념 열기

고대 바빌로니아의 점토판에는 다음과 같은 수학 문제가 실려 있다.

"어떤 정사각형의 넓이와 그 한 변의 길이를 합하면 $\frac{3}{4}$이다.

그 정사각형의 한 변의 길이를 구하시오."

(참고 자료: Melville, D. J., "The Area and the Side I Added: Some old Babylonian Geometry")

1 정사각형의 한 변의 길이를 x라 하고, 위의 밑줄 친 문장을 등식으로 나타내시오.

2 **1**의 등식을 (x에 대한 이차식)$=0$의 꼴로 나타내시오.

위의 개념 열기에서 밑줄 친 문장을 등식으로 나타내면 $x^2+x=\frac{3}{4}$이고, 이 등식을 (x에 대한 이차식)$=0$의 꼴로 나타내면

$$x^2+x-\frac{3}{4}=0$$

이다.

이와 같이 등식의 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리한 식이

(x에 대한 이차식)$=0$

의 꼴로 나타나는 방정식을 x에 대한 **이차방정식**이라고 한다.

중1 에서 배웠어요!
미지수의 값에 따라 참이 되기도 하고 거짓이 되기도 하는 등식을 그 미지수에 대한 방정식이라고 한다.

일반적으로 x에 대한 이차방정식은

$$ax^2+bx+c=0\ (a,\ b,\ c\text{는 수},\ a\neq0)$$

과 같이 나타낼 수 있다.

문제 01 다음 중에서 이차방정식인 것을 모두 찾으시오.

(1) $x^2-3x=-2$

(2) $2x^2+3x-5$

(3) $3x^2+5x=3(x^2-1)$

(4) $(x+1)(x-3)=-2x$

x의 값이 -2, -1, 0, 1, 2일 때, 이차방정식 $x^2+x-2=0$을 참이 되게 하는 x의 값을 구해 보자.

위의 이차방정식에 x의 각 값을 대입하여 이차방정식을 참이 되게 하는 x의 값을 구해 보면 다음과 같다.

x의 값	좌변	우변	참, 거짓
-2	$(-2)^2+(-2)-2=0$	0	참
-1	$(-1)^2+(-1)-2=-2$	0	거짓
0	$0^2+0-2=-2$	0	거짓
1	$1^2+1-2=0$	0	참
2	$2^2+2-2=4$	0	거짓

위의 표에서 $x=-2$ 또는 $x=1$일 때, 이차방정식 $x^2+x-2=0$은 참이 됨을 알 수 있다.

이와 같이 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$을 참이 되게 하는 미지수 x의 값을 이차방정식의 해 또는 근이라 하고, 이차방정식의 해 또는 근을 모두 구하는 것을 이차방정식을 푼다고 한다.

x의 값이 -2, -1, 0, 1, 2, 3일 때, 이차방정식 $x^2-2x-3=0$을 푸시오.

풀이 이차방정식 $x^2-2x-3=0$의 좌변에 x의 각 값을 대입하면 다음과 같다.

x	-2	-1	0	1	2	3
x^2-2x-3	5	0	-3	-4	-3	0

위의 표에서 $x=-1$ 또는 $x=3$일 때, 이차방정식 $x^2-2x-3=0$은 참이 된다.
따라서 해는 $x=-1$ 또는 $x=3$이다.

답 $x=-1$ 또는 $x=3$

x의 값이 -2, -1, 0, 1, 2일 때, 다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $x^2-x-2=0$

(2) $x^2+3x+2=0$

이차방정식의 풀이와 활용

• 이차방정식을 풀 수 있고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

인수분해를 이용하여 이차방정식을 어떻게 풀까?

개 념 열 기

두 수 a, b에 대하여 다음 중 $ab=0$이 참이 되는 경우를 말한 학생을 모두 찾으시오.

$a=0,\ b=1$

$a=1,\ b=0$

$a=0,\ b=0$

$a=1,\ b=1$

두 수 또는 두 식 A, B에 대하여

$$A=0 \text{ 또는 } B=0\text{이면} \quad AB=0$$

이다. 한편

$$AB=0\text{이면} \quad A=0 \text{ 또는 } B=0$$

이다.

두 수 또는 두 식 A, B에 대하여 $AB=0$이면
① $A=0$, $B\neq0$
② $A\neq0$, $B=0$
③ $A=0$, $B=0$
의 세 가지 중에서 하나가 성립한다.
이를 통틀어 '$A=0$ 또는 $B=0$'과 같이 나타낸다.

이 성질을 이용하여 이차방정식을 풀어 보자.

예를 들어 $(x-1)(x+2)=0$이면

$$x-1=0 \text{ 또는 } x+2=0$$

이므로 이차방정식 $(x-1)(x+2)=0$의 해는

$$x=1 \text{ 또는 } x=-2$$

이다.

참고 특별한 말이 없으면 이차방정식의 해는 실수 전체의 범위에서 생각한다.

문제 01 다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $x(x+1)=0$

(2) $(2x+1)(x-2)=0$

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 좌변이 두 일차식의 곱으로 인수분해될 때, 그 이차방정식을 풀어 보자.

다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $x^2-4x-12=0$　　　(2) $(x+1)(3x-2)=2$

(1) 좌변을 인수분해하면

$(x+2)(x-6)=0$

$x+2=0$ 또는 $x-6=0$

따라서 해는 $x=-2$ 또는 $x=6$이다.

검토 구한 해를 위의 이차방정식에 대입하면 (좌변)=(우변)이므로 문제의 뜻에 맞는다.

(2) 좌변의 괄호를 풀고, 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리하면

$3x^2+x-2=2$,　$3x^2+x-4=0$

좌변을 인수분해하면

$(3x+4)(x-1)=0$

$3x+4=0$ 또는 $x-1=0$

따라서 해는 $x=-\frac{4}{3}$ 또는 $x=1$이다.

검토 구한 해를 위의 이차방정식에 대입하면 (좌변)=(우변)이므로 문제의 뜻에 맞는다.

답 (1) $x=-2$ 또는 $x=6$　(2) $x=-\frac{4}{3}$ 또는 $x=1$

다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $x^2-11x+24=0$

(2) $6x^2+x-2=0$

(3) $(x+3)(2x+1)=-2$

(4) $(2x-1)(x+1)=1-2x$

이차방정식 중에는 두 해가 중복된 경우가 있다.

예를 들어 이차방정식 $x^2-6x+9=0$의 좌변을 인수분해하면

$$(x-3)^2=0,\text{ 즉 }(x-3)(x-3)=0$$

이므로 이 이차방정식의 해는

$$x=3\text{ 또는 }x=3$$

이다.

이와 같이 두 해가 중복될 때, 이 해를 이차방정식의 **중근**이라고 한다.

스스로 확인하기

(1) 이차방정식 $x^2+2x+1=0$의 좌변을 인수분해하면 $(x+1)^2=0$이므로 이 이차방정식의 해는 중근 $x=-1$이다.

(2) 이차방정식 $x^2-14x+49=0$의 좌변을 인수분해하면 $(x-\square)^2=0$이므로 이 이차방정식의 해는 중근 $x=\square$이다.

빈칸에 알맞은 것을 써넣어 보자.

문제 03 다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $x^2+10x+25=0$

(2) $9x^2-24x+16=0$

(3) $x(x+8)=-16$

(4) $(x+1)(4x-3)=5x-4$

문제 04 의사소통

다음 대화를 읽고, 도윤이의 물음에 대하여 친구들과 이야기해 보시오.

◆ 제곱근을 이용하여 이차방정식을 어떻게 풀까?

개 념 열 기

오른쪽 그림은 러시아의 화가 말레비치(Malevich, K. S., 1878~1935)의 '검은 사각형'이다. 이 그림은 정사각형으로 그 넓이는 약 6400 cm^2라고 한다.

(참고 자료: Gamwell, L., "Mathematics and Art: A Cultural History")

1 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라고 할 때, 그 넓이를 x에 대한 이차방정식으로 나타내시오.

2 정사각형의 한 변의 길이를 구하시오.

이차방정식 $x^2=100$에서 x는 100의 제곱근이므로 이 이차방정식의 해는

$$x=10 \text{ 또는 } x=-10$$

이다.

> $x=10$ 또는 $x=-10$을 $x=\pm10$으로 나타내기도 한다.

일반적으로 이차방정식 $x^2=k(k>0)$에서 x는 k의 제곱근이므로 해는

$$x=\sqrt{k} \text{ 또는 } x=-\sqrt{k}$$

이고, 이를 간단히 $x=\pm\sqrt{k}$와 같이 나타낸다.

스스로 확인하기

이차방정식 $2x^2-10=0$에서

좌변의 -10을 우변으로 이항하면 $2x^2=$ ☐이고,

양변을 2로 나누면 $x^2=$ ☐이다.

따라서 x는 ☐의 제곱근이므로 해는 $x=\pm$ ☐이다.

빈칸에 알맞은 것을 써넣어 보자.

문제 05 다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $x^2=8$

(2) $x^2-48=0$

(3) $9x^2=3$

(4) $16x^2-9=0$

예제 2

다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $(x+2)^2=9$　　(2) $(3x-1)^2-5=0$

$x=-2\pm3$은 $x=-2-3$ 또는 $x=-2+3$이므로 $x=-5$ 또는 $x=1$이다.

풀이 (1) $x+2$는 9의 제곱근이므로　$x+2=\pm3$

좌변의 2를 우변으로 이항하면　$x=-2\pm3$

따라서 해는　$x=-5$ 또는 $x=1$

검토 구한 해를 위의 이차방정식에 대입하면 (좌변)=(우변)이므로 문제의 뜻에 맞는다.

(2) 좌변의 -5를 우변으로 이항하면　$(3x-1)^2=5$

$3x-1$은 5의 제곱근이므로　$3x-1=\pm\sqrt{5}$

좌변의 -1을 우변으로 이항하면　$3x=1\pm\sqrt{5}$

따라서 양변을 3으로 나누면 해는　$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{3}$

검토 구한 해를 위의 이차방정식에 대입하면 (좌변)=(우변)이므로 문제의 뜻에 맞는다.

답 (1) $x=-5$ 또는 $x=1$　(2) $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{3}$

문제 06 다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $(x-5)^2=4$

(2) $(2x-1)^2=6$

(3) $(x+2)^2-5=0$

(4) $3(2x+3)^2-12=0$

이차방정식 $(x-3)^2-16=0$을 풀고, 자신의 풀이 방법을 설명하시오.

이차방정식 $x^2+bx+c=0(b\neq0,\ c\neq0)$에서 좌변을 인수분해하기 어려울 때는 상수항을 우변으로 이항하고 좌변을 완전제곱식으로 고친 다음, 제곱근을 이용하여 이차방정식을 풀 수 있다.

예제 3

이차방정식 $x^2-2x-1=0$을 푸시오.

풀이 좌변의 -1을 우변으로 이항하면 $\quad x^2-2x=1$

양변에 $\left\{(x\text{의 계수})\times\frac{1}{2}\right\}^2$을 더하면 $\quad x^2-2x+(-1)^2=1+(-1)^2$

좌변을 완전제곱식으로 고치고, 우변을 정리하면 $\quad (x-1)^2=2$

$x-1$은 2의 제곱근이므로 $\quad x-1=\pm\sqrt{2}$

따라서 좌변의 -1을 우변으로 이항하면 해는 $\quad x=1\pm\sqrt{2}$

검토 구한 해를 위의 이차방정식에 대입하면 (좌변)=(우변)이므로 문제의 뜻에 맞는다.

답 $x=1\pm\sqrt{2}$

문제 08

다음은 이차방정식 $4x^2-12x+7=0$을 푸는 과정이다. 빈칸에 알맞은 수를 쓰시오.

양변을 4로 나누고 좌변의 상수항을 우변으로 이항하면 $\quad x^2-3x=\square$

좌변을 완전제곱식으로 고치고, 우변을 정리하면 $\quad \left(x-\square\right)^2=\square$

제곱근을 구하면 $\quad x-\square=\square$

따라서 해는 $\quad x=\square$

문제 09

다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $x^2+2x-5=0$

(2) $x^2+5x-4=0$

(3) $2x^2-8x+3=0$

(4) $3x^2+2x-6=0$

이차방정식의 근의 공식은 무엇일까?

이차방정식 $2x^2+3x-1=0$을 제곱근을 이용하여 푸는 방법과 같은 방법으로 이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$을 풀어 보자.

	$2x^2+3x-1=0$의 풀이	$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$의 풀이
❶ 양변을 x^2의 계수로 나눈다.	$x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}=0$	$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$
❷ 좌변의 상수항을 우변으로 이항한다.	$x^2+\frac{3}{2}x=\frac{1}{2}$	$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$
❸ 양변에 $\left\{(x\text{의 계수})\times\frac{1}{2}\right\}^2$ 을 더한다.	$x^2+\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{4}\right)^2$	$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$
❹ 좌변을 완전제곱식으로 고치고, 우변을 정리한다.	$\left(x+\frac{3}{4}\right)^2=\frac{17}{16}$	$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$
❺ 제곱근을 구한다.	$x+\frac{3}{4}=\pm\frac{\sqrt{17}}{4}$	$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (단, $b^2-4ac\geq0$)
❻ 해를 구한다.	$x=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$	$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

이상에서 이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$에 대하여 다음과 같은 **근의 공식**을 얻는다.

> **이차방정식의 근의 공식**
>
> 이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$의 해는
>
> $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (단, $b^2-4ac\geq0$)

다음 이차방정식을 근의 공식을 이용하여 푸시오.

(1) $x^2-4x+2=0$　　　　(2) $3x^2+5x-1=0$

풀이 (1) 근의 공식에 $a=1$, $b=-4$, $c=2$를 대입하면

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\times1\times2}}{2\times1}=\frac{4\pm\sqrt{8}}{2}$$

$$=\frac{4\pm2\sqrt{2}}{2}=2\pm\sqrt{2}$$

검토 구한 해를 위의 이차방정식에 대입하면 (좌변)=(우변)이므로 문제의 뜻에 맞는다.

(2) 근의 공식에 $a=3$, $b=5$, $c=-1$을 대입하면

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times3\times(-1)}}{2\times3}=\frac{-5\pm\sqrt{37}}{6}$$

검토 구한 해를 위의 이차방정식에 대입하면 (좌변)=(우변)이므로 문제의 뜻에 맞는다.

답 (1) $x=2\pm\sqrt{2}$　(2) $x=\frac{-5\pm\sqrt{37}}{6}$

다음 이차방정식을 근의 공식을 이용하여 푸시오.

(1) $x^2-8x+9=0$　　　　(2) $4x^2+3x-3=0$

문제 해결 | 의사소통

수학 역량 기르기

이차방정식 $3x^2-4x+1=0$을 여러 가지 방법으로 풀고, 친구들에게 자신의 풀이 방법을 설명하시오.

문제를 해결하고 설명할 때는

- 문제의 조건과 정보를 파악하고 풀이 전략을 생각한다.
- 자신의 생각을 명확하게 전달한다.

◆ 이차방정식을 활용하여 어떻게 문제를 해결할 수 있을까?

우리 생활 주변에서 수량을 구하는 문제 중에는 이차방정식을 활용하여 해결할 수 있는 경우가 많다.

이와 같은 문제를 해결할 때는 먼저 구하려고 하는 것을 미지수로 놓고 수량 사이의 관계를 이차방정식으로 나타내어 푼다.

다음과 같은 문제를 이차방정식을 활용하여 해결해 보자.

어느 유기견 보호소에서는 간식용 비스킷 90개를 전체 유기견에게 똑같이 나누어 주려고 한다. 유기견 한 마리 당 나누어 준 비스킷의 개수가 전체 유기견의 수보다 27만큼 작다고 할 때, 전체 유기견의 수를 구하시오.

❶ 문제의 뜻을 이해하고 구하려는 값을 미지수로 놓는다.

전체 유기견의 수를 x마리로 놓는다.

❷ 문제의 뜻에 맞게 이차방정식을 세운다.

한 마리 당 나누어 준 비스킷은 $(x-27)$개이고, 전체 비스킷은 90개이므로 이차방정식을 세우면

$x(x-27)=90$

❸ 이차방정식을 푼다.

위의 이차방정식을 풀면

$x^2-27x-90=0$

$(x+3)(x-30)=0$

$x=-3$ 또는 $x=30$

이때 x는 자연수이므로 $x=30$

따라서 전체 유기견의 수는 30마리이다.

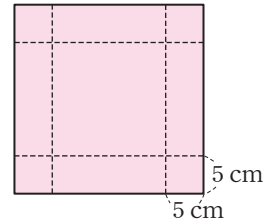
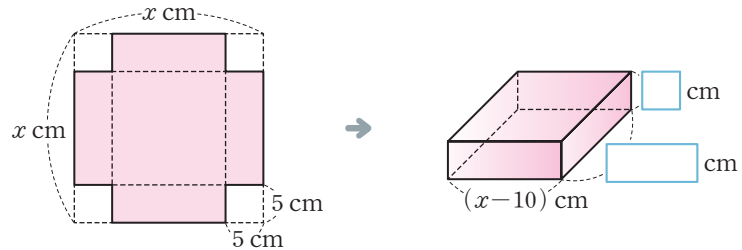
❹ 구한 해가 문제의 뜻에 맞는지 확인한다.

$30\times(30-27)=90$이므로 문제의 뜻에 맞는다.

일반적으로 이차방정식을 활용하여 문제를 해결할 때는 다음과 같은 순서로 푼다.

이차방정식을 활용하여 문제를 해결하는 과정

❶ 문제의 뜻을 이해하고 구하려는 값을 미지수로 놓는다.
❷ 문제의 뜻에 맞게 이차방정식을 세운다.
❸ 이차방정식을 푼다.
❹ 구한 해가 문제의 뜻에 맞는지 확인한다.

오른쪽 그림과 같은 정사각형 모양의 종이가 있다. 이 종이의 네 귀퉁이를 한 변의 길이가 5 cm인 정사각형 모양으로 잘라 내어 포장 상자를 만들 때, 포장 상자의 부피가 $4500\ \text{cm}^3$가 되도록 하는 처음 종이의 한 변의 길이를 구하려고 한다.

(1) 다음 그림의 빈칸에 알맞은 것을 써넣고, 이를 이용하여 이차방정식을 세우시오.

(2) (1)에서 세운 이차방정식을 풀어 처음 종이의 한 변의 길이를 구하고, 문제의 뜻에 맞는지 확인하시오.

어느 감귤 농장에서는 한 상자에 2000 g씩 포장하면 4200개의 상자를 채울 수 있는 양을 생산하였다고 한다. 한 상자에 x g씩 더 넣으면 상자는 $2x$개만큼 줄어든다고 할 때, x의 값을 구하시오.

(단, 상자의 무게는 생각하지 않는다.)

1 다음 이차방정식을 인수분해를 이용하여 푸시오.

(1) $x^2-5x+4=0$

(2) $4x^2-9=0$

(3) $2x^2-x-15=0$

(4) $3x^2+5x-2=0$

---

2 다음 이차방정식을 제곱근을 이용하여 푸시오.

(1) $(x-2)^2=6$

(2) $(2x+3)^2-8=0$

(3) $3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-15=0$

(4) $x^2+4x-6=0$

---

3 다음 이차방정식을 근의 공식을 이용하여 푸시오.

(1) $x^2+x-1=0$

(2) $x^2-5x+2=0$

(3) $2x^2+4x-3=0$

(4) $3x^2-5x+1=0$

---

4 다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $x(x+2)=-1$

(2) $(x+1)(x-5)=-6x-2$

(3) $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}=0$

(4) $0.2x^2+0.8x+0.5=0$

중단원 학습 점검

정답 및 해설 ▸ 250쪽

개념 정리

● 이차방정식

$2x^2-5x-3=0$ ← x에 대한 이차식

● 이차방정식의 해

이차방정식 $x^2+3x-4=0$의 해는 $x=-4$ 또는 $x=1$이다.

← $(-4)^2+3\times(-4)-4=0$(참), $1^2+3\times1-4=0$(참)

● 이차방정식의 풀이－인수분해 이용

• $x^2-5x+6=0$을 풀면

$(x-2)(x-3)=0$

$x=2$ 또는 $x=3$

• $x^2-14x+49=0$을 풀면

$(x-7)^2=0$

$x=7$ ← 중근: 중복된 두 근

● 이차방정식의 풀이－제곱근 이용

$(3x+1)^2=7$을 풀면

$3x+1=\pm\sqrt{7}$

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}}{3}$

● 이차방정식의 풀이－근의 공식 이용

$3x^2+7x+1=0$을 풀면

$x=\dfrac{-7\pm\sqrt{7^2-4\times3\times1}}{2\times3}$ ← $a=3, b=7, c=1$

$=\dfrac{-7\pm\sqrt{37}}{6}$

● 이차방정식의 활용

미지수 정하기 ➜ 이차방정식 세우기 ➜ 이차방정식 풀기 ➜ 확인하기

O, X 문제

다음 문장이 옳으면 O, 옳지 않으면 X를 ( ) 안에 쓰시오.

1 $4x^2-2x-3=3x^2$은 이차방정식이다. ( )

2 이차방정식 $(x+1)(x-3)=0$의 해는 $x=1$ 또는 $x=-3$이다. ( )

3 이차방정식 $x^2+18x+81=0$의 해는 중근 $x=-9$이다. ( )

4 이차방정식 $2x^2-5x-1=0$의 해는

$x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times2\times1}}{2\times2}$

$=\dfrac{-5\pm\sqrt{17}}{4}$

이다. ( )

기초 문제

1 다음 4장의 카드 중에서 이차방정식이 적힌 카드를 모두 찾으시오.

$-2x+3=5x^2$	$(x-1)(x+2)=x^2$
$3x+2x^2=3x+2$	$(2x-1)(x+3)$

2 다음 보기의 이차방정식 중에서 $x=2$를 해로 갖는 것을 모두 찾으시오.

보기

ㄱ. $x^2+3x-2=0$　　ㄴ. $x^2+2x-8=0$

ㄷ. $2x^2-5x+2=0$　　ㄹ. $3x^2-5x+2=0$

3 다음을 만족시키는 두 자연수를 구하시오.

기본 문제

4 이차방정식 $x^2-8x+k=0$이 중근 $x=a$를 가질 때, 두 수 a, k의 값을 각각 구하시오.

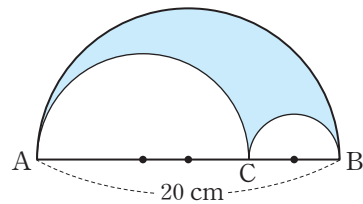
5 이차방정식 $x^2-(a+3)x+3a=0$의 두 해의 비가 $1:2$일 때, 수 a의 값을 모두 구하시오.

6 이차방정식 $3x^2+3x+p=0$의 해가 $x=\frac{q\pm\sqrt{33}}{6}$일 때, 두 수 p, q의 값을 각각 구하시오.

7 이차방정식 $x^2+kx+k=-1$의 일차항의 계수와 상수항을 바꾸어 풀었더니 한 해가 $x=3$이었다. 이때 처음 이차방정식의 해를 구하시오.

8 나이가 3살 차이가 나는 형제가 있다. 형의 나이의 5배가 동생의 나이의 제곱보다 9만큼 클 때, 형의 나이를 구하시오.

도전 문제

9 다음 그림은 3개의 반원으로 이루어진 도형이다. 큰 반원의 지름의 길이가 20 cm이고, 색칠한 부분의 넓이가 21π cm^2일 때, $\overline{BC}$의 길이를 구하시오. (단, $\overline{AC}>\overline{BC}$)

10 길이가 18 cm인 끈을 잘라서 크기가 다른 두 개의 정삼각형을 만들려고 한다. 두 정삼각형의 넓이의 비가 $3:2$가 되도록 할 때, 작은 정삼각형의 한 변의 길이를 구하시오.

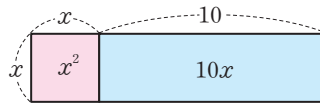
스스로 푸는 자기 주도 학습 수학 익힘책 ▶ 233쪽

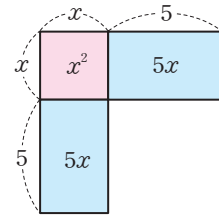
수행 과제 도형을 이용하여 이차방정식을 풀어 볼까?

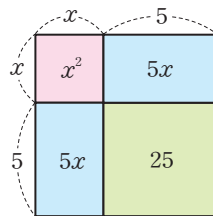
문제 해결

활동 목표 도형을 이용하여 이차방정식을 풀 수 있다.

이차방정식을 푸는 방법에는 여러 가지가 있지만 도형을 이용하여 풀 수도 있다. 다음은 도형을 이용하여 이차방정식 $x^2+10x=39$를 푸는 과정이다.

❶ 이차방정식의 좌변 x^2+10x를 정사각형과 직사각형의 넓이를 이용하여 나타낸다.

(도형의 넓이)$=x^2+10x$

❷ ❶에서 $10x$를 나타낸 직사각형을 합동인 두 개의 직사각형으로 나누어 옮겨 붙인다.

(도형의 넓이)$=x^2+10x$

❸ ❷의 도형에 한 변의 길이가 5인 정사각형을 이어 붙여 한 변의 길이가 $x+5$인 정사각형을 만든다.

(도형의 넓이)$=x^2+10x+25$
$=(x+5)^2$

❹ ❸의 도형의 넓이는 x^2+10x에 25를 더한 것과 같으므로 이를 이용하여 이차방정식을 푼다.

이차방정식 $x^2+10x=39$의
양변에 25를 더하면
$x^2+10x+25=39+25$
$(x+5)^2=64$
$x+5=\pm 8$
따라서 해는 $x=-13$ 또는 $x=3$이다.

| 주의 | 도형을 이용하여 넓이를 구할 때, x는 정사각형의 한 변의 길이이므로 음수가 될 수 없지만 실제로 이차방정식의 해를 구할 때는 음수의 해도 생각한다.

(참고 자료: Jacques Sesiano(Anna Pierrehumbert 옮김), "An Introduction to the History of Algebra: Solving Equations from Mesopotamian Times to the Renaissance")

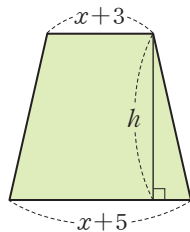
1 도형을 이용하여 이차방정식 $x^2+6x=16$을 풀어 보자.

2 이차방정식을 만들고, 도형을 이용하여 그 이차방정식을 풀어 보자.

대단원 학습 평가

1 다음 식 중에서 바르게 전개되지 않은 것은?

① $(a+3)^2=a^2+6a+9$
② $(2x-5)^2=4x^2-10x+25$
③ $(3x-1)(3x+1)=9x^2-1$
④ $(2x-2)(3x-5)=6x^2-16x+10$
⑤ $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)=x^2+x-\frac{3}{4}$

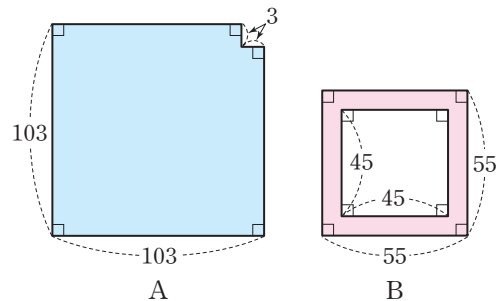
2 오른쪽 그림과 같은 사다리꼴의 넓이가 $2x^2+7x-4$일 때, 높이 h를 구하시오.

3 다음 보기 중에서 완전제곱식인 것을 모두 찾으면?

보기
ㄱ. x^2+2x+4　　ㄴ. $a^2-10a+25$
ㄷ. $x^2-4x+16$　　ㄹ. $9x^2+12x+4$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄹ　⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

4 $x=\frac{1}{3-2\sqrt{2}}$, $y=\frac{1}{3+2\sqrt{2}}$일 때, $x^2-2xy+y^2$의 값을 구하시오.

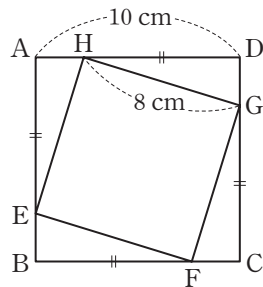
5 $1<x<2$일 때, $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-4x+4}$를 간단히 하시오.

6 다음 두 도형 A, B에서 색칠한 부분의 넓이를 인수분해를 이용하여 각각 구하시오.

7 두 이차식 $3x^2-8x+p$, $6x^2+qx+3$의 공통인 인수가 $3x+1$일 때, 두 수 p, q의 값을 각각 구하시오.

정답 및 해설 ▸ 251쪽

●○○
8 이차방정식 $x^2-6x-1=2x^2$을 $(x+a)^2=b$의 꼴로 변형할 때, 두 수 a, b의 값을 각각 구하시오.

●●○
9 일차함수 $y=ax-2$의 그래프가 점 $(a+1,\ 2a+4)$를 지나고, 제2사분면을 지나지 않을 때, 수 a의 값을 구하시오.

●●●
10 다음 그림은 한 변의 길이가 10 cm인 정사각형 ABCD에서 $\overline{AE}=\overline{BF}=\overline{CG}=\overline{DH}$가 되도록 네 점 E, F, G, H를 잡아 □EFGH를 그린 것이다. □EFGH는 한 변의 길이가 8 cm인 정사각형일 때, $\overline{AH}$의 길이를 구하시오. (단, $\overline{DH}>\overline{AH}$)

서술형 문제

[11~14] 다음 문제의 풀이 과정을 자세히 쓰시오.

●●○
11 다음은 x^2의 계수가 1인 이차식의 인수분해에 대한 하은이와 지호의 대화이다. 처음 이차식을 바르게 인수분해하시오.

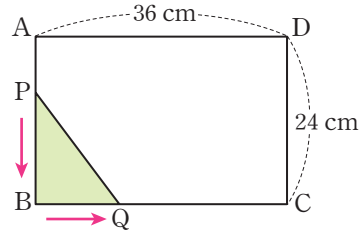
나는 x의 계수를 잘못 보고 인수분해하였더니 $(x-3)(x+4)$가 되었어.

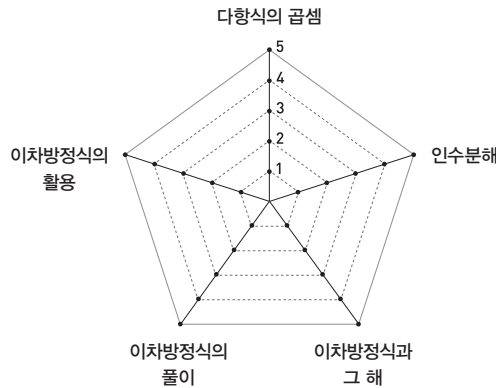
나는 상수항을 잘못 보고 인수분해하였더니 $(x+3)(x-7)$이 되었어.

●●○
12 이차방정식 $x^2-4x+1=0$의 한 해를 $x=p$라고 할 때, $p+\dfrac{1}{p}$의 값을 구하시오.

13 ●●○ 다음을 모두 만족시키는 두 자리의 자연수를 구하시오.

- 십의 자리의 수와 일의 자리의 수의 합은 15이다.
- 각 자리의 수의 곱은 처음 수보다 31만큼 더 작다.

14 ●●● 다음 직사각형 ABCD에서 점 P는 점 A를 출발하여 변 AB를 따라 점 B까지 매초 2 cm의 속력으로 이동하고, 점 Q는 점 B를 출발하여 변 BC를 따라 점 C까지 매초 3 cm의 속력으로 이동한다. 두 점 P, Q가 동시에 출발할 때, △PBQ의 넓이가 $96\ cm^2$가 되는 것은 몇 초 후인지 구하시오.

자기 평가

1 이 단원에서 학습한 내용에 대한 나의 성취 수준을 다음 그림에 점으로 표시하고, 이웃한 점을 선으로 연결해 보자.

| 성 취 수 준 |

1수준: 개념을 이해하기 어려웠다.
2수준: 문제를 해결하기 어려웠다.
3수준: 문제를 일부 해결하였다.
4수준: 문제를 대부분 해결하였다.
5수준: 문제를 모두 해결하였다.

이해가 부족한 내용은 본문을 복습!
문제가 더 필요하면
수학 익힘책 ▶ 232~233쪽

2 이 단원을 시작할 때 세운 학습 계획을 잘 실천하였는지 평가해 보고, 이해하기 어려웠던 내용을 적어 보자.

인도의 옛 수학책 “릴라바티”

12세기경 인도의 수학자 바스카라(Bhaskara, A., 1114~1185(1193?))는 마치 시를 쓰듯 아름다운 문장으로 수학책을 쓰고, 이 책의 제목을 그의 딸의 이름을 따서 “릴라바티(Lilavati)”라고 지었다.

“릴라바티”는 총 13장으로 구성되어 있는데, 주로 수학적 개념 및 용어의 설명과 방정식, 이자 계산, 평면도형과 입체도형 등에서의 간단한 문제 풀이를 다루고 있다.

다음은 “릴라바티”에 있는 수학 문제 중의 하나이다.

> 어느 숲속에서 원숭이 무리가 이리저리 뛰며 놀고 있다.
> 이 무리의 원숭이의 수는 숲 전체 원숭이의 수의 $\frac{1}{8}$의 제곱이다.
> 전체 원숭이의 수에서 이 무리의 원숭이의 수를 제외한
> 나머지 12마리는 근처 언덕에서 서로 소리를 지르고 있다.
> 이 숲에 있는 전체 원숭이는 몇 마리인가?

이 문제에서 전체 원숭이의 수를 x라고 하면

$$x-\left(\frac{1}{8}x\right)^2=12$$

인 관계가 성립하므로 위의 이차방정식을 풀면 $x=16$ 또는 $x=48$, 즉 전체 원숭이는 16마리 또는 48마리이다.

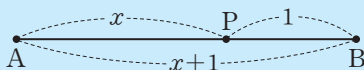
(참고 자료: 세인트앤드루스대학교, 2018)

창의 융합 프로젝트

수학 + 예술

선분 AB 위의 한 점 P를 잡았을 때, 다음 그림과 같이

$\overline{AB} : \overline{AP} = \overline{AP} : \overline{PB}$

를 만족시키는 비를 황금비라고 한다.

이때 $\overline{AP}=x$, $\overline{PB}=1$이라고 하면 황금비는

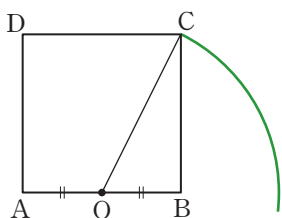
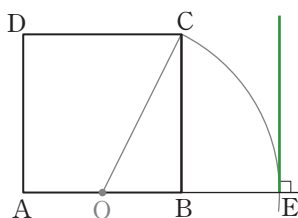
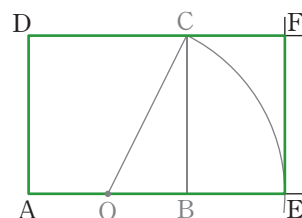
$(x+1) : x = x : 1$

을 만족시키므로 이 비례식을 풀면 $x^2-x-1=0$에서 $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 약 $x=1.618$이다. 즉, 황금비는 어떤 선분을 1.618 : 1로 나누는 비이다.

황금비는 균형미, 안정미, 조화미 등을 갖추고 있어 예술 작품, 실생활 용품 등에 널리 사용되어 왔다.

황금사각형 작도하는 방법

준비물: 자, 컴퍼스, 펜

정사각형 ABCD를 그리고, 다음 순서에 따라 황금사각형을 작도해 보자.

❶ $\overline{AB}$의 중점 O를 중심으로 하고 $\overline{OC}$를 반지름으로 하는 호를 그린다.

❷ ❶에서 그린 호와 $\overline{AB}$의 연장선의 교점을 E라 하고, 점 E에서 $\overline{AE}$와 수직인 선분을 긋는다.

❸ ❷에서 그은 수선과 $\overline{DC}$의 연장선의 교점을 F라고 하면 직사각형 AEFD가 황금사각형이 된다.

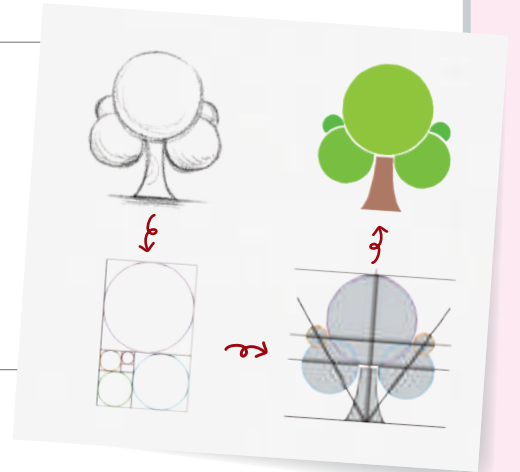
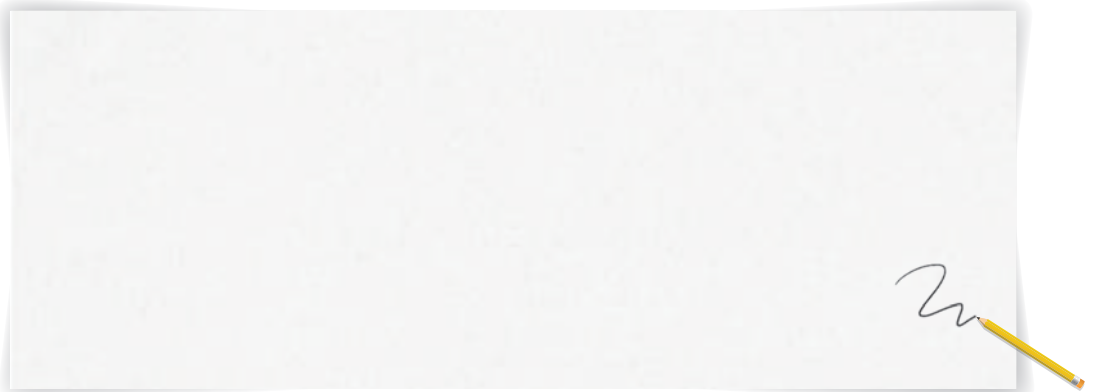
황금비를 이용하여 미술 작품을 디자인해 보자.

활동지

황금비를 이용하여 디자인하기

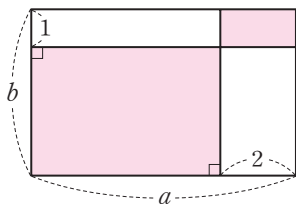
■ 모둠명:　　　　　　　　　　■ 모둠원:

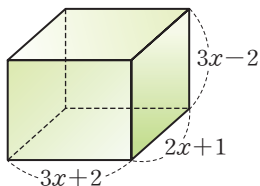
1 다음은 황금비를 이용하여 나무를 그리는 과정이다. 이 과정에 따라 나무를 그려 보자.

① 나무를 스케치한다.
② 황금사각형을 그린다.
③ 황금사각형 안에 짧은 변을 한 변으로 하는 정사각형을 그리고, 그 안에 내접원을 그린다.
④ ③의 과정에서 남은 사각형도 황금사각형이 된다. 남은 사각형에서 ③의 과정을 반복한다.
⑤ ③~④에서 그린 내접원을 이용하여 나무를 그린다.

2 황금비를 이용한 다양한 그림을 직접 디자인하고 그려 보자.

동료 평가	활동에 적극적으로 참여하였는가?
	친구의 의견을 잘 듣고 존중하였는가?
	활동 과정에서 다양하고 좋은 의견을 많이 냈는가?
	활동 과정에서 서로 협력하였는가?

스스로 푸는 자기 주도 학습

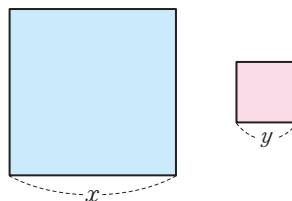
수학 익힘책

●○○
1 다음 그림과 같은 직사각형에서 색칠한 부분의 넓이를 구하시오.

●○○
2 다항식 $(4x-y)^2-(x+3y)(x-3y)$를 계산하시오.

●●○
3 다음 그림과 같은 직육면체의 겉넓이를 구하시오.

●●○
4 $2020\times2022+1$은 어떤 자연수를 제곱한 수와 같을 때, 이 자연수를 구하시오.

●○○
5 다항식 $(x+2)(x-4)-16$은 x의 계수가 1인 두 일차식의 곱으로 인수분해될 때, 이 두 일차식의 합을 구하시오.

●●○
6 두 다항식 $x^2+ax+36$, $4x^2+ax+b$가 각각 완전제곱식이 되도록 하는 두 수 a, b의 값을 각각 구하시오. (단, $a>0$)

●●○
7 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 각각 x, y인 두 정사각형이 있다. 두 정사각형의 둘레의 길이의 합이 40이고, 넓이의 차가 50일 때, 두 정사각형의 한 변의 길이의 차를 구하시오. (단, $x>y$)

●○○
1 이차방정식 $ax^2-4x-8=0$의 한 해가 $x=2$일 때, 수 a의 값을 구하시오.

●●○
2 이차방정식 $x^2-(k-2)x+16=0$의 해가 중근일 때, 수 k의 값을 모두 구하시오.

●●○
3 이차방정식 $x^2+2x-4=0$의 한 해가 $x=a$이고, 이차방정식 $2x^2-3x-6=0$의 한 해가 $x=b$일 때, $2a^2+4a-2b^2+3b$의 값을 구하시오.

●●○
4 어떤 자연수를 제곱해야 할 것을 잘못하여 2배 하였더니 제곱한 것보다 15만큼 작았다고 할 때, 어떤 자연수를 구하시오.

●●○
5 어떤 책을 펼쳤을 때 펼쳐진 두 면의 쪽수의 곱이 210이라고 한다. 이때 두 면의 쪽수를 각각 구하시오.

●●○
6 지면에 수직인 방향으로 초속 60 m로 던진 공의 t초 후의 높이가 $(60t-5t^2)$ m라고 할 때, 던진 지 몇 초 후에 이 공이 지면에 떨어지는지 구하시오.

●●●
7 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1 cm인 정오각형에서 두 대각선 AC, BE의 교점을 P라고 하면 △ABC와 △APB는 서로 닮은 도형이다. 대각선 AC의 길이를 x cm라고 할 때, 물음에 답하시오.

(1) $\overline{CP}$의 길이를 구하시오.

(2) x의 값을 구하시오.